

VI Encuentro Conjunto RSME-SMM
València, 1-5 de Julio de 2024
Sesión Especial “Sistemas Hamiltonianos y Mecánica Celeste”

Organizadores:

Jorge Galán-Vioque, Universidad de Sevilla,
jgv@us.es

Abimael Bengochea, Instituto Tecnológico Autónomo de México,
abimael.bengochea@itam.mx

Métodos constructivos en teoría KAM para toros invariantes en sistemas hamiltonianos periódicos y cuasiperiódicos

Pedro Porras Flores

Palabras clave: Teoría KAM, Sistemas Hamiltonianos no Autónomos, Método de la Parametrización, Variedades Invariantes

Mathematics Subject Classification 2020: 37J40, 70H08 y 37M21

Resumen

Se presenta el método de parametrización en formato a posteriori para demostrar un teorema KAM aplicado a toros lagrangianos en sistemas hamiltonianos cuasi-periódicos. Este enfoque implica la búsqueda de una parametrización para un toro que satisfaga una ecuación de invarianza, la cual depende de propiedades dinámicas y geométricas específicas. La prueba teórica demuestra la convergencia de un esquema iterativo de quasi-Newton, aprovechando la estructura geométrica del problema para simplificar las ecuaciones funcionales resueltas en cada paso iterativo. El teorema establece que, si el error de invarianza es suficientemente pequeño y se satisfacen ciertas condiciones de no degeneración, existe una parametrización para un toro invariante verdadero. Los esquemas derivados de la teoría pueden convertirse en métodos numéricos eficientes y confiables para el cálculo de toros invariantes. Este enfoque se ha aplicado al análisis de un modelo de Tokamak, en el cual un toro invariante actúa como barrera entre dos regiones caóticas del plasma.

Trabajo en colaboración con Renato Calleja (IIMAS-UNAM, México) y Alex Haro (UB, Barcelona).

Referencias

- [1] F. J. LÓPEZ AND J. GARCÍA. Cyclic weighted shifts on Hilbert spaces. *J. Best Math.* **1**(1), 1–50, 2024.
- [2] F. J. LÓPEZ AND A. FONT. *Toeplitz operators*. Springer, London, 2023.
- [3] C. CHANDRE AND M. VITTOT AND G. CIRAOLO AND P. GHENDRIH AND R. LIMA. Control of stochasticity in magnetic field lines. *Nuclear Fusion* **46**(1), 33, 2005.

- [4] D. DEL CASTILLO-NEGRETE. Self-consistent chaotic transport in fluids and plasmas. *Chaos* **10**(1), 75–88, 2000.
- [5] A. HARO AND A. LUQUE. A-posteriori KAM theory with optimal estimates for partially integrable systems. *Journal of Differential Equations* **266**(2-3), 1605–1674, 2019.
- [6] A. HARO, M. CANADELL, J.-LL. FIGUERAS, A. LUQUE, AND J.-M. MONDELO. The parameterization method for invariant manifolds. *Journal of Differential Equations* **266**(2-3), 1605–1674, 2019.
- [7] HARO, ALEX AND CANADELL, MARTA AND FIGUERAS, JORDI-LLUIS AND LUQUE, ALEJANDRO AND MONDELO, JOSEP-MARIA. *The parameterization method for invariant manifolds*. Springer, London, 2016.

Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad de Barcelona
 Ciudad de México, México
 Barcelona, España
 porras@ciencias.unam.mx

Semi-analytical exploration of diffusion around L_1 in the Spatial RTBP

Pablo Roldán

Palabras clave: dynamical systems, celestial mechanics, restricted three body problem, Arnold diffusion.

Mathematics Subject Classification 2020: 37J40, 37C50, 37C29

Resumen

We consider the spatial circular restricted three-body problem, as a model for the motion of spacecraft relative to the Sun-Earth system. We focus on the dynamics near the equilibrium point L_1 located between the Sun and the Earth. We show that it is possible for the spacecraft to transition from an orbit that is nearly planar relative to the ecliptic, to an inclined orbit, at zero energy cost. That is, we can achieve a change in the inclination of the orbit of the spacecraft simply by choosing suitable initial conditions and exploiting the gravitational influence Sun and Earth. Moreover, we provide several explicit constructions of such orbits, and also develop an algorithm to design orbits that achieve the shortest transition time.

Joint work with Amadeu Delshams (UPC, Barcelona) and Marian Gidea (Yeshiva University, NY).

Departamento de Matemáticas
 Universitat Politècnica de Catalunya
 Barcelona, España
 pablo.roldan@upc.edu

Dinámica de la Gran Nube de Magallanes

Patricia Sánchez-Martín

Palabras clave: Sistemas Hamiltonianos, Potenciales galácticos, Variedades invariantes, Transferencia de materia

Mathematics Subject Classification 2020: 85-10, 70F15, 85A05

Resumen

Las galaxias barradas se caracterizan por una barra central de estrellas y un par de brazos que emanan de sus extremos. Generalmente, estos brazos son simétricos tanto en posición como en densidad. Sin embargo, en algunas galaxias, como la Gran Nube de Magallanes (LMC), esta simetría en densidad se pierde, y uno de los brazos puede incluso desaparecer. En este trabajo investigamos las causas de estas asimetrías a través de las variedades invariantes del modelo galáctico.

El transporte de materia entre las regiones internas y externas de la galaxia está gobernado por las variedades invariantes del sistema dinámico de la galaxia. Estas variedades emanan de las órbitas planas de Lyapunov alrededor de los puntos de equilibrio hiperbólicos situados en los extremos de la barra, formando estructuras visibles en forma de brazos. Las variedades y sus intersecciones definen las estructuras que facilitan el transporte de materia.

En este estudio, examinamos la asimetría en los brazos galácticos resultante de la inhomogeneidad de la barra, junto con el impacto de desplazar el centro de masas del sistema fuera del eje principal de la barra.

Finalmente, utilizando los datos de la LMC proporcionados por el telescopio Gaia (DR3), y aplicando técnicas de análisis de datos combinatorios y topológicos la información estelar disponible, de posiciones y velocidades de las principales estrellas en un único tiempo, construimos un modelo de potencial para la LMC y analizamos la asimetría específica que presenta.

Este es un trabajo conjunto con J. Amorós (UPC), C. García-Gómez (URV), J. J. Masdemont (UPC) y M. Romero-Gómez (UB).

Departamento de Matemáticas
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona, España
patricia.sanchez.martin@upc.edu

Continuación y Bifurcaciones de Órbitas Cuasi Satélites en el Problema Circular Restringido de 3 Cuerpos Marte-Phobos

Jorge Galán-Vioque

Palabras clave: Problema restringido tres cuerpos, órbitas periódicas, bifurcaciones, Marte-Phobos, Continuación numérica

Mathematics Subject Classification 2020: 70F07, 34C25, 37G15

Resumen

Presentamos una metodología para continuar y analizar el comportamiento de bifurcación de órbitas periódicas para Órbitas Cuasi Satélites (QSO) en el Problema Espacial Circular Restringido de 3 Cuerpos para el sistema Marte Fobos basado en un método de continuación para órbitas periódicas en presencia de cantidades conservadas. Estas órbitas han recibido un renovado interés para las misiones de exploración de la Luna, las lunas marcianas y los asteroides en general. La exploración completa de todos los QSO es una tarea interminable y aquí nos centramos solamente en tres casos particulares caracterizados por el número de revoluciones alrededor del satélite del QSO base. Hemos detectado varias bifurcaciones hacia soluciones no planares. La herramienta utilizada (el programa AUTO) proporciona seguimiento de estabilidad, bifurcación y cambio de rama y puede ampliarse para estudiar también las variedades invariantes asociadas.

Departamento de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla
Sevilla, España
jgv@us.es

Órbitas periódicas cerca de colisión en un problema restringido asociado a la coreografía de ocho

Abimael Bengochea

Palabras clave: Sistemas Hamiltonianos no Autónomos, Órbitas periódicas, Continuación numérica

Mathematics Subject Classification 2020: 70F07, 34C25, 70F16

Resumen

Estudiamos órbitas cerca de colisión en un problema restringido de cuatro cuerpos no autónomo en el plano. Este problema restringido consiste en el movimiento de una partícula de prueba bajo la influencia gravitacional de tres primarios que siguen la coreografía on figura de ocho. Usamos coordenadas regularizadas y la herramienta de reversores para estudiar cierto tipo de órbitas periódicas. Las condiciones iniciales de las órbitas periódicas fueron calculadas con ayuda de algunos problemas de contorno.

Trabajo en colaboración con Ernesto Pérez-Chavela (ITAM, Ciudad de México) y Jaime Burgos-García (UAdeC, Saltillo).

Departamento de Matemáticas,
Instituto Tecnológico Autónomo de México,
Ciudad de México, México
abimael.bengochea@itam.mx

Sistemas Hamiltonianos, campos de Liouville y cuaternios: una perspectiva para construir integradores simplécticos

Hugo Jiménez-Pérez

Palabras clave: Sistemas Hamiltonianos, integradores simplécticos, campos de Liouville, aplicaciones simplécticas locales, cuaternios y variedades casi cuaterniónicas

Mathematics Subject Classification 2020: 53D22, 65P10, 70H15

Resumen

Revisitando el producto de dos variedades simplécticas con una interpretación ligeramente diferente, consideramos los difeomorfismos clásicos entre el producto de dos haces cotangentes con el doble haz cotangente y el haz cotangente del producto de dos variedades de base para definir una estructura casi-cuaterniónica. Esta estructura y sus estructuras simplécticas y formas de Liouville asociadas nos permiten definir aplicaciones simplécticas para simular el flujo de sistemas Hamiltonianos autónomos naturales. En esta plática daremos los detalles generales de la construcción de un campo local de Liouville asociado a un sistema Hamiltoniano autónomo y de una aplicación

simpléctica basada en dicho campo de Liouville.

Parte de este trabajo fue realizado durante un postdoctorado en el IPGP en colaboración con Barbara Romanowicz y Jean-Pierre Vilotte con financiamiento de la Fondation du Collège de France y TOTAL convención PU14150472, así como la beca ERC Advanced Grant WAVETOMO RCN 99285, Subpanel PE10, Framework F7.

Referencias

- [1] C. P. BOYER. A note on hyperhermitian four-manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society* **102**(1), 157–164, 1998.
- [2] A. CANNAS DA SILVA. *Introduction to symplectic and Hamiltonian geometry*. Inst. de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Brasil, 2003.
- [3] H. HOFER AND E. ZEHNDER. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser, Berlin, 2012.
- [4] L. PAULETTE. On liouville forms, Poisson Geometry. *Banach Center Publications*, **51**(1), 151–164, 2000.
- [5] D. D. ROYCE. *Riemannian holonomy groups and calibrated geometry, Vol. 12*. Oxford University Press, United Kingdom, 2007.
- [6] F. KANG AND M. QIN. *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [7] P. LIBERMANN AND C. MARLE. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Ridel, Boston, 1987.
- [8] D. MCDUFF AND D. SALAMON. *Introduction to symplectic topology*. Oxford University Press, United Kingdom, 2017.
- [9] S. REICH. Backward error analysis for numerical integrators. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **36**(5), 1549–1570, 1999.
- [10] A. WEINSTEIN. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. *Advances in Mathematics*, **6**(3), 329–346, 1971.
- [11] H. WEYL. *The Classical Groups. Their Invariants and Representations..* Princeton University Press, Princeton, 1946.

Laboratoire Astroparticule et Cosmologie (APC/IN2P3/CNRS),
UMR7164, CNRS/CNES/CEA/ObsParis/UPC,
Université Paris Cité
Paris, Francia
info@hugo-jimenez.fr
jimenez@apc.u-paris.fr