VI Encuentro Conjunto RSME-SMM
València, 1-5 de Julio de 2024
Sesión Especial "Geometría discreta y matroides"

Organizadores:
Kolja Knauer, Universitat de Barcelona,
kolja.knauer@ub.edu
Leonardo Ignacio Martínez Sandoval, Universidad Nacional Autónoma de México,
leomtz@ciencias.unam.mx
Edgardo Roldán Pensado, Universidad Nacional Autónoma de México,
e.roldan@im.unam.mx

Politopos, distancias y puntos reticulares

Mónica Blanco

Palabras clave: Politopos reticulares, Matroides orientadas, Distancias reticulares

Mathematics Subject Classification 2020: 52C07

Resumen

En esta charla haré un pequeño repaso a mis resultados sobre clasificación de politopos reticulares, donde la matroide orientada de los puntos reticulares y las distancias reticulares juegan un importante papel. En particular, para dimensión 3, la clasificación de politopos con un determinado número de puntos reticulares, la clasificación según el subretículo generado por dichos puntos y la extrapolación de estos resultados a la distancia reticular entre la frontera y el interior de un politopo reticular.

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria
39005, Santander, Spain
m.blanco.math@gmail.com

Curvas de Jordan digitales y teselaciones del plano

Natalia Jonard

Palabras clave: Curvas de Jordan digitales, Teselaciones del plano, Teorema de la curva de Jordan

Mathematics Subject Classification 2020: 52C20, 68R10

Resumen

Uno de los teoremas más intuitivos y simples de enunciar (pero muy difícil de probar) es el teorema de la curva de Jordan, el cual establece que una curva cerrada simple separa el plano en exactamente dos regiones conexas, una acotada y la otra no.

Con el surgimiento de las imágenes digitales se generó la necesidad de distinguir cuándo una curva formada por píxeles estaba realmente delimitando una figura o región de la imagen. Esto trajo consigo la tarea de encontrar resultados análogos al teorema de la curva de Jordan, pero que sean válidos para conjuntos finitos cuyos elementos se puedan identificar con un píxel en una imagen digital. En la década de los 70's, Azriel Rosenfeld publicó en una serie de artículos una versión discreta del teorema de la curva de Jordan, en la que el espacio base es un subconjunto de $\mathbb{Z}^2$.

A partir de esos resultados, se han demostrado distintas versiones discretas de dicho teorema, para las cuales se han usado distintos enfoques: algunos más topológicos y otros más discretos. En esta plática presentaremos algunos resultados obtenidos en conjunto con Diego Fajardo Rojas, los cuales establecen la existencia de curvas de Jordan en cualquier teselación del plano (que sea suficientemente decente).

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
04510, Ciudad de México, Mexico
`nat@ciencias.unam.mx`

Transversales de Kneser para politopos cíclicos

Leonardo Martínez-Sandoval

Palabras clave: Politopo cíclico, k-planos transversales, Gráficas de Kneser, Matroides orientados

Mathematics Subject Classification 2020: 52A35, 52B11, 52C40,

Resumen

En 2010, Arocha, Bracho, Montejano and Ramírez-Alfonsín plantearon el siguiente problema. Sean d, λ, k enteros positivos. ¿Cuál es la máxima cantidad de puntos en $\mathbb{R}^d$ tales que sin importar cómo los elegimos, es posible encontrar un plano $(d-\lambda)$-dimensional para todas las envolventes convexas de los k-subconjuntos de los puntos? A esa cantidad máxima le llamamos $m(k,d,\lambda)$.

Los autores notaron (y también, de manera independiente, B. Bukh, J. Matousek y G. Nivash) que este problema tiene conexiones con generalizaciones de dos problemas clásicos: el de determinar los números cromáticos de las gráficas de Kneser, y el teorema del punto central de Rado. Arocha et al. obuvieron algunas cotas inferiores y superiores para $m(k,d,\lambda)$, y conjeturaron que tenía un valor específico.

En esta charla hablaremos de algunos resultados relacionados con este problema. Introduciremos una variante del problema que, a diferencia del problema original, es invariante bajo el tipo de orden de los puntos. Esto nos permite estudiar el problema usando matroides orientados. Un análisis combinatorio cuidadoso nos permite encontrar asintóticamente el valor buscado para cuando los puntos son los vértices de un politopo cíclico. Esto, a su vez, tiene implicaciones para el valor del parámetro original $m(k,d,\lambda)$.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
04510, Ciudad de México, Mexico
`nat@ciencias.unam.mx`

Borsuk y Vázsonyi alrededor de los poliedros de Reuleaux

Déborah Oliveros

Palabras clave: Conjetura de Borsuk, Problema de Vázsonyi, Poliedros de Reuleaux

Mathematics Subject Classification 2020: 52B10, 52C17, 52B55

Resumen

La conjetura de Borsuk y el problema de Vázsonyi son dos problemas muy interesantes en geometría discreta relacionados con la noción de diámetro en conjuntos acotados. En esta charla daremos una caracterización completa de todos los conjuntos finitos en el espacio Euclidiano de dimensión 3 que tienen número de Borsuk 4. Para esto, utilizamos las estructuras minimales del problema de Vázsonyi así como los polyedros de Reuleaux. Este es un trabajo conjunto con G. López Campos y J. Ramirez Alfonsin.

Instituto de Matemáticas, Unidad Juriquilla
Universidad Nacional Autónoma de México
76230, Juriquilla, Querétaro, Mexico
doliveros@im.unam.mx

Rigidity and universality of order type extensions

Arnau Padrol

Palabras clave: Order type extensions, Point configurations, Projective equivalence

Mathematics Subject Classification 2020: 52C35, 52C40

Resumen

Let P and Q be point configurations. We show that if for every extension of P there is an extension of Q with the same order type, then P and Q are projectively equivalent. Here, an extension of P means any point configuration containing P as a subset. This is joint work with Xavier Goaoc.

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
08007, Barcelona, Spain
arnau.padrol@ub.edu

Refutando realizabilidad de matroides orientadas en la práctica

Julian Pfeifle

Palabras clave: Matroides orientadas, Realizabilidad, SAT-solvers

Mathematics Subject Classification 2020: 05B35, 52B40, 68W01

Resumen

Ejemplos comunes de objetos combinatorios abstractos en geometría discreta son esferas simpliciales o poliedrales y arreglos de pseudo-circulos. El obstáculo más común para que tales objetos sean realizables es que su estructura sea incompatible con una matroide orientada. En esta charla presentaremos el software r9n, una extensión de polymake que une la eficiencia de c++ con el poder de SAT-solvers modernos como CaDiCal para refutar rápidamente la existencia de una matroide orientada. Hablaremos de las ideas detrás de su implementación y de resultados prácticos obtenidos con él.

Departament de Matemàtica Aplicada, Universitat Politècnica de Catalunya 08034, Barcelona, Spain
`julian.pfeifle@upc.edu`

2-matroides y delta-matroides asociados a mapas combinatorios

Maria Guadalupe Rodríguez Sánchez

Palabras clave: 2-matroides, Delta-matroides, Mapas combinatorios

Mathematics Subject Classification 2020: 05B35, 05C62

Resumen

Un mapa $\mathcal{M} = (G, S)$ está definido para una gráfica conexa G, encajada en una superficie compacta S. Se consideran dos gráficas asociadas a G, su gráfica dual G^* y su gráfica medial $M_G = (V_M, E_M)$. M_G se construye poniendo un vértice v_e por cada arista e de G, dos vértices v_e y v'_e son los extremos de una arista de M_G si e y e' son adyacentes y ambas pertenecen a la misma cara de G.

M_G es una gráfica 4-regular. Se dibuja sobre el mapa M la gráfica medial M_G tomando como vértices los puntos medios de las aristas de G. Se dice que se realiza un corte sobre v en V_M si se induce una partición P_v de las aristas de M_G incidentes a v, tales que $P_v = \{P_v^{'}, P_v^{''}\}$ con $|P_v^{'}|,|P_v^{''}| = 2$. Sea e la arista de G que corresponde a v. Se efectúa un corte local τ en v si al realizar el corte en v se eligen $P_v^{'}$ y $P_v^{''}$ de tal forma que no intersectan a e. Para toda arista e de M_G, sea e^* su arista dual y v la intersección de e y e^*. Se dice que se realiza un corte τ^* sobre v, si al hacer el corte τ^*, las aristas de M_G no intersectan a e^*. Bouchet llamó a la tripleta (τ, M_G, τ^*) un mapa combinatorio.

Si al efectuar un corte en cada vértice de G_M se obtiene un paseo Euleriano en G_M, se dice que el corte es Euleriano. Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de los cortes de M_G que son Eulerianos y solo emplean cortes τ y τ^*, se sabe que $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Sea $V = V_M$ y $V' = \{v' : v \in V\}$. Se construye una familia de subconjuntos de $V \cup V'$ asociando a cada corte Euleriano S en $\mathcal{E}$, un conjunto B_S de cardinalidad $|V|$ tal que, para todo $v \in V$, $v \in B_S$ si se aplicó el corte τ a v o $v' \in B_S$ si se aplicó el corte τ^* a v. $Q_{\mathcal{E}}$=$(V \cap V', \Omega, B_{\mathcal{E}})$, donde $B_{\mathcal{E}} = \{B_S : S \in \mathcal{E}\}$ son las bases del 2-matroide Q_E con $\Omega = \{\Omega_v : v \in V\}$ y $\Omega_v = \{v, v'\}$.

Haciendo la traza de $Q_{\mathcal{E}}$ con V se obtiene un delta-matroide D_M sobre V. $D_M = (V, \mathcal{F})$ es el delta-matroide asociado al mapa combinatorio (τ, M_G, τ^*) sobre el conjunto de vértices de G_M y con $\mathcal{F}$, como:

$\mathcal{F} = \{F \subseteq V : \tau(F) \cup \tau^*(\bar{F})$ es un corte Euleriano$\}$, donde $\tau(F) = \{\tau(v) : v \in F\}$ y $\tau^*(F) = \{\tau^*(v) : v \in \bar{F}\}$ y $\bar{F} = V \setminus F$.

Sean $B \subset E(G)$, $B^* = \{e^* : e \in B\}$ y $\bar{B}$=$E(G) \setminus B$. Se dice que B es una base de $\mathcal{M}$ si $S \setminus B \cup \bar{B}^*$ es conexo. Si S es una esfera, las bases de un mapa $\mathcal{M} = (G, S)$, son los árboles generadores de G. Es decir, las bases de $\mathcal{M}$ son las bases del matroide de ciclos de G.

Unidad Azcapotzalco, Universidad Autónoma Metropolitana
02200, Ciudad de México, Mexico
rsmg@azc.uam.mx

Teoremas tipo Tverberg: El estudio de particiones de puntos como complejos simpliciales

Antonio de Jesús Torres

Palabras clave: Teorema de Tverberg, Complejos simpliciales, Resultados de tipo Ramsey

Mathematics Subject Classification 2020: 52A35, 52C35

Resumen

El Teorema de Tverberg es uno de los teoremas más hermosos en geometría discreta. Este teorema podría interpretarse como un resultado de tipo Ramsey, de la siguiente manera: Si tienes suficientes puntos en el espacio euclidiano, siempre existe una forma de dividirlos de tal manera que el nervio (patrón de intersección) sea un complejo. Discutiremos posibles formas de generalizar este teorema, así como algunas aplicaciones interesantes.

Department of Mathematics, University of California, Davis
95616, CA, USA
antor@ucdavis.edu