

VI Encuentro Conjunto RSME-SMM

València, 1-5 de Julio de 2024

Sesión Especial “Sistemas dinámicos, bifurcaciones y sistemas no suaves”

Organizadores:

Enrique Ponce Núñez, Universidad de Sevilla,
eponcem@us.es

Fernando Verduzco González, Universidad de Sonora,
verduzco@mat.uson.mx

Algunas variantes de la bifurcación pseudo-Hopf

Juan Andres Castillo Valenzuela

Palabras clave: Bifurcación pseudo-Hopf, pseudo-equilibrio, equilibrio frontera

Mathematics Subject Classification 2020: 34A36, 37G10, 37G05

Resumen

En esta plática se considerarán casos degenerados de la bifurcación pseudo-Hopf para sistemas lineales por pedazos en tres dimensiones. Actualmente se conocen dos maneras en las que ocurre esta bifurcación, una es cuando un ciclo límite de cruce (clc) se crea o se destruye, debido al colapso de dos rectas de tangencia invisibles y al subsecuente cambio de estabilidad de un pseudo-equilibrio definido en la región deslizante entre las dos rectas. La otra ocurre cuando el clc se crea o se destruye debido al tránsito de un pseudo-equilibrio a través de una singularidad Teixeira, pasando de una región deslizante atractiva a una repulsiva (o viceversa) y cambiando de estabilidad en el proceso. Se mostrará en ambos casos que el clc se produce aún si se considera uno o dos equilibrios frontera en lugar de un pseudo-equilibrio genérico.

Referencias

- [1] A. COLOMBO AND M.R. JEFFREY. Nondeterministic chaos, and the two-fold singularity in piecewise smooth flows. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **10**(2), 423–451, 2011.
- [2] R. CRISTIANO, D.J. PAGANO, E. FREIRE AND E. PONCE. Revisiting the Teixeira singularity bifurcation analysis: Application to the control of power converters. *Int. J. Bifurcation Chaos* **28**(09), 1850106, 2018.
- [3] J. CASTILLO. The pseudo-Hopf bifurcation and derived attractors in 3D Filippov linear systems with a Teixeira singularity. *Chaos* **30**, 113101, 2020.
- [4] J.M. ISLAS, J. CASTILLO, B. AGUIRRE-HERNANDEZ AND F. VERDUZCO. Pseudo-Hopf bifurcation for a class of 3D Filippov linear systems. *Int. J. Bifurcation Chaos* **31**(02), 2150025, 2021.

Universidad de Sonora

Bldv. Luis Encinas y Rosales S/N, 83000 Hermosillo, Sonora, México.

juanc@mat.uson.mx

Desdoblamiento de la singularidad doblez-cúspide en sistemas Filippov lineal-cuadráticos en el plano.

Jocelyn Anaid Castro Echeverría

Palabras clave: Sistema Filippov Cuadrático, Desdoblamiento Fold-cusp

Mathematics Subject Classification 2020: 34A36, 37G10, 37G05

Resumen

Para un sistema Filippov en el plano, el escenario más simple donde puede presentarse la singularidad doblez-cúspide, es cuando el sistema se encuentra formado por la combinación de un campo lineal con un campo cuadrático. Se considera una familia de estos sistemas, donde las soluciones de la parte lineal son simétricas respecto a la horizontal, y la parte cuadrática, presentada en [1] posee dos parámetros de bifurcación, los cuales controlan la posición de los dos puntos de tangencia. Dicho cambio de posición puede generar la aparición de conexiones homoclínicas y heteroclínicas entre singularidades como puntos de tangencia, equilibrios y pseudo-equilibrios, así como la existencia de ciclos límite de cruce y ciclos deslizantes, los cuales son encontrados mediante el uso de herramientas sencillas, sin hacer uso de los mapeos de Poincaré. Otros desdoblamientos para esta singularidad son presentados en [2] y [3]. Este es un trabajo conjunto con Fernando Verduzco.

Referencias

- [1] J. A. CASTRO AND F. VERDUZCO. Bifurcation Analysis in Planar Quadratic Differential Systems with Boundary. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **30**(07), 2030017, 2020.
- [2] C. A. BUZZI, T. DE CARVALHO AND M. A. TEIXEIRA. On 3-parameter families of piecewise smooth vector fields in the plane. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **11**(4), 1402–1424, 2012.
- [3] M. GUARDIA, T. M. SEARA, M. A. TEIXEIRA. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems. *Journal of Differential Equations* **250**, 1967-2023, 2011.

Tecnologico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias
Blvd. Enrique Mazón López 965, 83000 Hermosillo, Sonora, México.
jocelyn.castro@tec.mx

Estudio del efecto de la dispersión en la población total de una metapoblación a través de sistemas dinámicos discretos

Daniel Franco

Palabras clave: Sistemas dinámicos discretos, Atracción global, Dinámica de poblaciones

Mathematics Subject Classification 2020: 92D25, 37N25, 39A60

Resumen

El hábitat de muchas especies está fragmentado, por lo que es crucial comprender cómo la dispersión entre las distintas regiones que lo componen impacta en el tamaño total de la población. En esta presentación, consideraremos modelos de dos regiones en tiempo discreto que presentan tanto dispersión simétrica como asimétrica. En el caso simétrico, describiremos cuatro patrones de respuesta distintos del tamaño total de la población a medida que aumenta la tasa de dispersión. En caso asimétrico, mostraremos que estos patrones pueden ser replicados limitando convenientemente la movilidad entre regiones.

Referencias

- [1] J. C. GRUMBACH, F. N. REURIK, J. SEGURA, D. FRANCO, AND F.M. HILKER. The effect of dispersal on asymptotic total population size in discrete- and continuous-time two-patch models. *J. Math. Biol.*, **87**(4), 60, 2023.
- [2] J. SEGURA AND D. FRANCO. One way or another: Combined effect of dispersal and asymmetry on total realized asymptotic population abundance. *Math. Biosciences* **373**, 109206, 2024,

Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Departamento de Matemática Aplicada I
E-28040, Madrid, Spain
df franco@ind.uned.es

La bifurcación pseudo-Bautin en sistemas Filippov de dos y tres dimensiones

José Manuel Islas Hernández

Palabras clave: Bifurcación pseudo-Bautin, Bifurcación silla-nodo de ciclos límite

Mathematics Subject Classification 2020: 34A36, 37G05, 37G10

Resumen

El estudio de la bifurcación de Hopf resulta de gran importancia, ya que ayuda al análisis de estabilidad de sistemas dinámicos suaves, en los cuales encontramos órbitas periódicas, en donde también podemos encontrar la versión generalizada de dicha bifurcación, conocida como la bifurcación Bautin, la cual consiste en la aparición de dos ciclos límite y su posterior colisión y desaparición. En esta plática, abordamos la existencia de un fenómeno similar en sistemas Filippov, llamado la bifurcación pseudo-Bautin, tanto en dos dimensiones [1], como en las versiones genérica [2] y no genérica [3] en tres dimensiones. Éste es un trabajo en conjunto con Jocelyn Castro, Fernando Verduzco y Juan Castillo.

Referencias

- [1] J. CASTILLO, J. A. CASTRO, J.M. ISLAS AND F. VERDUZCO. Two-parametric unfoldings for planar invisible double-tangency singularities. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. **34**(1), 2024.
- [2] J. CASTILLO AND F. VERDUZCO. Pseudo-Bautin bifurcation in 3D Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **32**(08), 2022.

- [3] J. M. ISLAS, J. CASTILLO AND F. VERDUZCO. Pseudo-Bautin bifurcation for a non-generic family of 3D Filippov systems. *Systems & Control Letters*. **185**, 2024.

Universidad Autónoma de Querétaro
Querétaro, México
josemanuel.islas@uaq.mx

Recurrencia de órbitas y caos en un sistema lineal a trozos en 3D

Enrique Ponce

Palabras clave: Sistemas lineales a trozos, Bifurcaciones, Caos de tipo Shilnikov

Mathematics Subject Classification 2020: 34A36, 37G05, 37G10

Resumen

Consideramos un sistema diferencial continuo y lineal a trozos con dos zonas que surge en el análisis de la bifurcación Hopf-cero con simetría, ver capítulo 10 en [2], cuando se estudian los fenómenos asociados a la bifurcación de equilibrios en la frontera de separación, un fenómeno que puede dar lugar a nuevas órbitas periódicas y en algunos casos a la transición abrupta a un régimen caótico, ver capítulo 5 en [1]. Estudiamos el caso en que una de las zonas posee un equilibrio de tipo silla-foco, mientras que la dinámica en la otra zona, heredera del Hopf-cero, conforma órbitas de estructura helicoidal. Mostramos que las órbitas poseen una propiedad de recurrencia que permite conjeturar la existencia tanto de soluciones periódicas como de atractores no periódicos. Se trata de un trabajo realizado conjuntamente con Emilio Freire y Javier Ros.

Referencias

- [1] M. DI BERNARDO, A. CHAMPNEYS, C. J. BUDD AND P. KOWALCZYK. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Theory and Applications*. Appl. Math. Sci. Series, 163, Springer London, 2008..
- [2] E. PONCE, J. ROS AND E. VELA. *Bifurcations in Continuous Piecewise Linear Systems. Applications to Low-dimensional Electronic Oscillators*. RSME Springer Series 7, Springer Nature Switzerland, 2022.

E.T.S. Ingeniería
Camino de los descubrimientos s.n.
Universidad de Sevilla
E-41092, Sevilla, España
eponcem@us.es

Fenómeno de paso lento a través de la bifurcación transcritical en sistemas lineales a trozos.

Antonio E. Teruel

Palabras clave: Sistemas lineales a trozos, Bifurcaciones dinámicas, Bifurcación transcritical, Dinámica lenta-rápida

Mathematics Subject Classification 2020: 34A36, 37G05, 37G10

Resumen

El objetivo de esta charla es mostrar cómo el uso de campos vectoriales lineales a trozos puede complementar el conocimiento existente sobre la dinámica lenta-rápida. En particular, nos centraremos en el comportamiento del retardo maximal que surge cuando se atraviesa lentamente una bifurcación en la que un equilibrio pierde su estabilidad. En este caso, la naturaleza lineal a trozos del campo vectorial permite un control completo del comportamiento del retardo maximal en función de los parámetros del sistema. De esta forma, podemos identificar tres regiones en el espacio de parámetros: aquella en la que el retardo maximal tiende a cero conforme el parámetro singular, aquella en la que el retardo maximal no está acotado, y aquella en la que el retardo maximal tiene un límite positivo y finito.

Inspirados por el trabajo [1], planteamos un sistema lineal a trozos que presenta dos bifurcaciones transcriticals. Utilizando el estudio sobre el retardo maximal descrito anteriormente, describimos el fenómeno del retardo reforzado como la culminación de una explosión canard no acotada.

Referencias

- [1] J-P. FRANÇOISE, C. PIQUET C, AND A. VIDAL. Enhanced delay to bifurcation. *Bull Belg Math Soc Simon Stevin* **15**(5), 825–831, 2008.
- [2] M. KRUPA AND P. SZMOLYAN. Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities *Nonlinearity* **14**(6), 1473, 2001.
- [3] J. PENALVA, M. DESROCHES, A, E, TERUEL, AND C. VICH. Slow passage through a hopf-like bifurcation in piecewise linear systems: Application to elliptic bursting. *Chaos* **32**(12), 123109, 2022.
- [4] A. PÉREZ-CERVERA, A.E. TERUEL. Slow passage through a transcritical bifurcation in piecewise linear differential systems: Canard explosion and enhanced delay *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **135**,108044, 2024.

Universidad de las Islas Baleares
E-07122, Palma de Mallorca, España
antonioe.teruel@uib.es

Bifurcación pseudo-cúspide en sistemas diferenciales lineales discontinuos en 3D

Fernando Verduzco González

Palabras clave: Bifurcación pseudo-Bautin, bifurcación pseudo-cúspide.

Mathematics Subject Classification 2020: 34A36, 37G10, 37G05

Resumen

En esta charla retomamos los trabajos publicados en [1] y [2], relacionados con la bifurcación pseudo-Bautin en sistemas Filippov tri-dimensionales, en los casos no-genérico y genérico, respectivamente. La existencia de un parámetro de control en el caso no-genérico, nos da la pauta para

establecer condiciones suficientes para la existencia de un punto cúspide en el diagrama de bifurcación. Esto nos permite determinar una región donde coexisten 3 ciclos límite de cruce. Finalmente, aplicamos este resultado a un sistema de control con retroalimentación del estado. Este es un trabajo conjunto con Bruno Campoy Garza y Juan Andres Castillo Valenzuela.

Referencias

- [1] J. M. ISLAS, J. CASTILLO AND F. VERDUZCO. Pseudo-Bautin bifurcation for a non-generic family of 3D Filippov systems. *Systems & Control Letters*. **185**, 2024.
- [2] J. CASTILLO AND F. VERDUZCO. Pseudo-Bautin bifurcation in 3D Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **32**(08), 2022.

Universidad de Sonora
Blvd. Luis Encinas y Rosales S/N, 83000 Hermosillo, Sonora, México.
verduzco@mat.uson.mx

Soluciones periódicas, toros KAM y bifurcaciones en un potencial con inspiración cosmológica

Patricia Yanguas

Palabras clave: Hamiltonianos resonantes, modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, normalización y reducción, bifurcación de Hopf hamiltoniana, toros KAM, hamiltoniano cosmológico, espacio reducido e invariantes

Mathematics Subject Classification 2020: 34C15, 34C20, 34C25

Resumen

En esta charla consideramos la familia de sistemas hamiltonianos perturbados $\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{1}{2}(x^2 + X^2) - \frac{1}{2}(y^2 + Y^2) + \frac{1}{2}(z^2 + Z^2) + \varepsilon^2[\alpha(x^4 + y^4 + z^4) + \beta(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)]$ en resonancia 1:−1:1 dependiendo de dos parámetros reales. Demostramos la existencia de soluciones periódicas utilizando reducción y promedios. También calculamos su estabilidad. Concretamente encontramos un máximo de 13 familias para cada nivel de energía $h < 0$ y un máximo de 26 para cada $h > 0$. Para cada nivel de energía no nulo caracterizamos los distintos tipos de soluciones periódicas, así como las bifurcaciones en términos de los parámetros. Determinamos la estabilidad lineal de cada familia de soluciones periódicas y probamos la existencia de 3-toros KAM que encierran a algunas de las soluciones linealmente estables. Asimismo, caracterizamos bifurcaciones hamiltonianas críticas en el espacio reducido.

Este es un trabajo conjunto con Jesús F. Palacián, Claudio Vidal y Jhon Vidarte.

Referencias

- [1] J. F. PALACIÁN, C. VIDAL, J. VIDARTE AND P. YANGUAS. Periodic solutions, KAM tori and bifurcations in a cosmology-inspired potential. *Nonlinearity* **32**, 3406–3444, 2019.

Universidad Pública de Navarra
E-31006, Pamplona, Spain
yanguas@unavarra.es