VI Encuentro Conjunto RSME-SMM
València, 1-5 de Julio de 2024
Sesión Especial "Topología Algebraica"

Organizadores:
Ramón Flores, Universidad de Sevilla,
ramonjflores@us.es
Luis Jorge Sánchez Saldaña, Universidad Autónoma de México,
luisjorge@ciencias.unam.mx

Una noción simplicial de fibrado tangente

Desamparados Fernández Ternero

Palabras clave: Símplice, fibrado

Mathematics Subject Classification 2020: 55U10

Resumen

Recientemente hemos caracterizado completamente la noción de fibración simplicial en el contexto de los complejos simpliciales abstractos. Esto plantea la cuestión de si es posible definir un fibrado tangente $\mathrm{T}K$ para un complejo simplicial K.

En 1955, Nash definió un fibrado tangente $\mathrm{T}X$ para cualquier espacio topológico X, y demostró que, cuando X es una variedad, $\mathrm{T}X$ tiene el mismo tipo de homotopía fibrada que el fibrado tangente usual. Inspirados por esta construcción, explicaremos cómo definir $\mathrm{T}K$ para un complejo simplicial.

Para justificar el nombre de fibrado tangente abordaremos dos resultados:

- Primero, existe una adición local $\mathrm{T}K \to K \times K$ similar a la aplicación exponencial;
- segundo, hay una equivalencia de homotopía entre $|\mathrm{T}K|$ y $\mathrm{T}|K|$, donde $|\cdot|$ denota la realización geométrica.

Trabajo en proceso y conjunto con J.M. García Calcines (La Laguna), E. Macías-Virgós (Santiago de Compostela) y J.A. Vilches (Sevilla).

Universidad de Sevilla
E-41013, Sevilla, España
desamfer@us.es

Modelos de Lie de los espacios topológicos y su no linealidad

Mario Fuentes

Palabras clave: Homotopía racional, ecuación de Maurer-Cartan, álgebras de Lie

Mathematics Subject Classification 2020: 55P62

Resumen

Las teorías de homotopía racional clásicas, debidas a Quillen y a Sullivan, captan en su totalidad el tipo de homotopía racional de los espacios topológicos simplemente conexos. Más concretamente, inducen una equivalencia entre la categoría (homotópica y racional) de los conjuntos simpliciales simplemente conexos y ciertas categorías algebraicas basadas en álgebras de Lie y en álgebras asociativas y conmutativas. Pero además, los functores que inducen dichas equivalencias proporcionan 'modelos' de los espacios, que nos permiten calcular explícitamente invariantes homotópicos como los grupos de homotopía racional $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ o los grupos de (co)homología con coeficientes racionales $H_*(X;\mathbb{Q})$.

Cuando intentamos estudiar espacios no conexos y no simplemente conexos, la situación se complica. El grupo fundamental, $\pi_1(X)$, deja de ser un grupo abeliano y, por tanto, no tiene sentido hablar de su racionalización; pero es incluso más grave con $\pi_0(X)$ que no tiene ningún tipo de estructura salvo la de conjunto. Los modelos clásicos se basan en construcciones de tipo 'homológicas' para calcular los invariantes homotópicos: en consecuencia, no podemos esperar obtener resultados no lineales usando estas técnicas.

Necesitamos, por tanto, un tipo de ecuación no lineal cuyas soluciones representen el conjunto de componentes conexas de nuestro espacio en cuestión. Esta ecuación es la equación de Maurer-Cartan de un álgebra de Lie, y supone el primer paso para la construcción de los modelos de Lie de los símplices. Es un problema muy difícil el de encontrar una expresión explícita para estos modelos y justo esta dificultad radica en su necesaria no linealidad.

En esta charla explicaré brevemente estos conceptos, así como un resultado reciente en esta área que da lugar a nuevas operaciones no lineales en álgebras de Lie.

Université de Toulouse
E-31058, Toulouse, Francia
mario.fuentes.rumi@gmail.com

Grupos de trenzas en árboles y álgebras exteriores de caras

Jesús González

Palabras clave: Grupos de trenzas en gráficas, producto copa cúbico, Teoría de Morse discreta

Mathematics Subject Classification 2020: 20F36, 55R80, 57M15, 57Q70

Resumen

Usando teoría de Morse discreta mostramos que el anillo de cohomología del grupo de trenzas en un árbol queda codificado en términos de lo que llamamos el complejo simplicial de interacciones locales entre los vértices esenciales del árbol. En particular, para cierta clase de árboles, por ejemplo los binarios, el anillo de cohomología correspondiente queda dado como el álgebra exterior de caras del complejo de interacciones.

CINVESTAV
E-07000, Ciudad de México, México
jesus@math.cinvestav.mx

Descenso, homotopía y representaciones modulares

Juan Omar Gómez

Palabras clave: Descenso, categoría estable, grupo de Picard, álgebra separable

Mathematics Subject Classification 2020: 20C07, 18G65, 18N60, 18G80

Resumen

De manera intuitiva e informal, el descenso es una técnica de pegado que nos permite pasar de información local a información global. En esta charla voy a hacer precisa esta idea para la categoría estable de representaciones modulares de grupos discretos, al menos desde un punto de vista homotópico. Como aplicación de este enfoque, voy a presentar una herramienta para calcular el grupo de Picard de la categoría estable para grupos con un modelo de dimensión finita del espacio clasificante para acciones propias, así como la clasificación de álgebras separables para ciertas clases de grupos infinitos.

Universität Bielefeld
E-33615, Bielefeld, Alemania
jgomez@math.uni-bielefeld.de

Descomposición sectorial de difeomorfismos analíticos planos

María Martín Vega

Palabras clave: Difeomorfismos analíticos, descomposición sectorial, equivalencia topológica débil, índice de Poincaré

Mathematics Subject Classification 2020: 37C25, 37C15

Resumen

En esta charla proponemos una descomposición de la dinámica de difeomorfismos analíticos planos en sectores parabólicos, hiperbólicos y elípticos. Dumortier, Roussarie y Rodrigues ya estudiaron este problema para difeomorfismos C^∞ que cumplen una desigualdad de Lojasiewicz, lo que implica que tienen puntos fijos aislados. En nuestro trabajo, asumiendo las condiciones de analiticidad, damos pruebas distintas para la obtención de esta descomposición que son válidas para difeomorfismos con curvas de puntos fijos. También estudiamos la relación entre la descomposición sectorial y la clasificación topológica débil de estos difemorfismos, así como la relación del índice de Poincaré, cuando hay un punto fijo aislado, con dicha descomposción (fórmula de Bendixon).

Universidad de Valladolid
E-47011, Valladolid, España
maria.martin.vega@uva.es

Topología de complejos cúbicos aleatorios de dos dimensiones

Erika Roldán

Palabras clave: Complejos cúbicos, homología, teorema de Erdös-Spencer

Mathematics Subject Classification 2020: 0501, 0506

Resumen

Estudiamos un modelo natural de complejos cúbicos aleatorios de dos dimensiones que son subcomplejos de un cubo de n dimensiones, y en el cual cada cuadrado posible (2-cara) se incluye independientemente con probabilidad p. Nuestro resultado principal exhibe un umbral preciso $p = 1/2$ para la desaparición de la homología a medida que la dimensión n tiende a infinito. Este es un análogo bidimensional de los teoremas de Burtin y Erdős-Spencer que caracterizan el umbral de conectividad para grafos aleatorios en el 1-esqueleto del cubo n-dimensional. Nuestro resultado principal también puede verse como un equivalente cúbico del teorema de Linial-Meshulam para complejos simpliciales aleatorios de dos dimensiones. Sin embargo, los modelos exhiben comportamientos notablemente diferentes. Mostramos que si $p > 1 - sqrt(1/2) \simeq 0{,}2929$, se tiene que con alta probabilidad el grupo fundamental es un grupo libre con un generador por cada cara maximal de una dimensión. Como corolario, la desaparición de la homología y la conectividad simple tienen el mismo umbral.

Trabajo conjunto con Matthew Kahle y Elliot Paquette.

Max Planck Institut
E-04013, Leipzig, Alemania
roldan@mis.mpg.de

Todos los sistemas de fusión realizables son dóciles

Albert Ruiz

Palabras clave: Sistema de fusión, grupos simples finitos

Mathematics Subject Classification 2020: 20D20

Resumen

El Teorema de Clasificación de los Grupos Finitos Simples (CGFS) divide los grupos finitos simples en varias familias. Su demostración es uno de los mayores logros de las matemáticas y es consecuencia de unos centenares de artículos (entre 1955 y 2008) que ocupan más de 10000 páginas.

La aparición de los sistemas de fusión [Puig, Broto-Levi-Oliver] ha aportado nuevas herramientas que podrían utilizarse para simplificar una parte de esta demostración. El professor M. Aschbacher encabeza un proyecto para simplificar partes de la demostración con estas nuevas herramientas y en uno de los pasos propuestos se utiliza el concepto de sistema de fusión dócil ("tame.^{en} inglés). La comprensión de estos sistemas aportaría herramientas para progresar en este proyecto.

En esta charla veremos el paso del álgebra a la topología para el estudio de los grupos, así como a axiomatización de los sistemas de fusión y la aparición de nuevos ejemplos (sistemas de fusión exóticos). El estudio de los sistemas de fusión exóticos motivó el concepto de sistema de fusión dócil. Acabaremos la charla con un resultado reciente que demuestra que todos los sistemas de fusión realizables son dóciles.

Trabajo conjunto con C. Broto, J. Møller y B. Oliver.

Universitat Autònoma de Barcelona
E-08193, Bellaterra (Barcelona), España
Albert.Ruiz@uab.cat.

Sobre los grupos modulares de superficies no orientables

Miguel Xicoténcatl

Palabras clave: Grupos modulares, superficies no orientables, espacios de configuraciones, teorema de realización de Nielsen, cohomología de Farrell

Mathematics Subject Classification 2020: 57K20,55R80, 55R40, 30F50, 30F60, 57M07

Resumen

En esta charla presentaré un panorama sobre mi trabajo reciente sobre la estructura y la cohomología de los grupos modulares $Mod(N_g)$ de superficies no orientables N_g. Los resultados incluyen: la cohomología de los grupos modulares (con puntos marcados) del plano proyectivo y la botella de Klein y su relación con las clases características de haces de superficies, el teorema de realización de Nielsen para superficies no orientables, la no existencia de secciones para la proyección natural de $Diff(N_g)$ sobre $Mod(N_g)$ y un estudio sistemático de la cohomología de Farrell de $Mod(N_g; k)$ para $g > 2$.

Rrabajo conjunto con M. Maldonado, C. Hidber, N. Colin y R. Jiménez.

CINVESTAV
E-07000, Ciudad de México, México
xico@math.cinvestav.mx