

VI Encuentro Conjunto RSME-SMM
València, 1-5 de Julio de 2024
Sesión Especial “Geometría métrica y riemanniana III”

Organizadores:

Fernando Galaz García, Durham University,
fernando.galaz-garcia@durham.ac.uk

David González Álvaro, Universidad Politécnica de Madrid,
david.gonzalez.alvaro@upm.es

Jaime Santos Rodríguez, Universidad Politécnica de Madrid,
jaime.santos@upm.es

Regularidad Lipschitz para sistemas elípticos de tipo ROF en variedades Hadamard

Esther Cabezas-Rivas

Palabras clave: funcional ROF, sistema elíptico, condición Neumann, regularidad, soluciones sobre variedades Riemannianas

Mathematics Subject Classification 2020: 35J60, 35D10, 35A23, 58E20

Resumen

El funcional de Rudin-Osher-Fatemi (ROF) es el modelo variacional más popular para la restauración de imágenes, en particular, para la eliminación de ruido: consiste en sumar a la variación total un *término de fidelidad* que controla la proximidad a la imagen inicial. Esta se codifica a través de una función f definida sobre una superficie compacta y con frontera, que toma valores sobre una variedad Riemanniana abierta de dimensión n . Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes tienen interés por sí mismas, ya que pueden ser interpretadas como un problema de autovalores para el análogo Riemanniano del 1-Laplaciano. Desde este punto de vista, se trata de sistemas elípticos que guardan ciertas similitudes con la teoría de aplicaciones armónicas (o p -armónicas) entre variedades.

Demostramos la existencia y unicidad de minimizantes de dicho funcional, siendo esto último únicamente cierto sobre variedades Hadamard (pues la prueba usa la convexidad de la variación total que solo se cumple en esas circunstancias). A continuación, presentamos una serie de resultados de regularidad sobre el sistema de EDPs asociado a un funcional relajado con condición de Neumann. Los dos ingredientes clave son estimaciones para el gradiente que se deducen de la aplicación de una desigualdad tipo Caccioppoli obtenida por los propios autores [1], así como la adaptación de los resultados de regularidad para problemas de tipo Neumann de Arkipova [2]. Por último, aplicamos estos resultados al modelo ROF para obtener la regularidad Lipschitz de los minimizantes.

Este es un trabajo conjunto con S. Moll y V. Pallardó-Julià.

Referencias

- [1] E. CABEZAS-RIVAS, S. MOLL, V, PALLARDÓ-JULIÀ. Partial regularity for manifold constrained quasilinear elliptic systems. *Preprint*.
- [2] A. A. ARKHIPOVA, On the Neumann problem for nonlinear elliptic systems with a quadratic nonlinearity *Rossiĭskaya Akademiya Nauk. Algebra i Analiz.* **8** (5), 189–209, 1996.

Universitat de València
E-46100, Burjassot, Spain
esther.cabezas-rivas@uv.es

Deformaciones y rigidez de foliaciones Riemannianas planas

Diego Corro

Palabras clave: Folioaciones Riemannianas, Colapso, Rigidez.

Mathematics Subject Classification 2020: 53C12, 53C23, 53C20, 57R30, 53C24.

Resumen

En esta plática veremos que dada una foliación Riemanniana regular plana, podemos colapsar la variedad foliada con curvatura y diámetro acotado.

Recordaremos el concepto de F-estructuras inducidas por el colapso, introducidas por Cheeger y Gromov.

En el caso en que la variedad es simplemente conexa comparando estas F-estructuras con la foliación, obtenemos un resultado de rigidez, demostrando que la foliación está dada por una acción de un toro.

Referencias

- [1] D. CORRO. Collapsing regular Riemannian foliations with flat leaves. *arXiv:2403.11602* [math.DG], 1–23, 2024.
- [2] J. CHEEGER AND M. GROMOV. Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded. I. *J. Differential Geom.* **23**, 309–346, 1986.
- [3] J. CHEEGER AND M. GROMOV. Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded. II. *J. Differential Geom.* **32**, 309–346, 1990.
5Springer, London, 2023.

Cardiff University
CF10 3AT, Cardiff, Reino Unido
diego.corro.math@gmail.com

Bi-Lipschitz embeddings of the space of unordered m-tuples with a partial transportation metric

Ana Lucía García Pulido

Palabras clave: Optimal transport, Wasserstein spaces, Bi-Lipschitz embeddings

Mathematics Subject Classification 2020: 51F30

Resumen

The question of bi-Lipschitz embeddability of Wasserstein spaces into classical Banach spaces has attracted much attention. The importance of such embeddings can be seen, for instance, in the proof of Almgren's partial regularity theorem.

In optimal transport, Wasserstein distances are the prime examples transportation metrics to compare measures of the same total mass. This talk will consider the partial transportation metric defined by Figalli and Gigli, which removes this mass constraint. We will begin with the definition of these spaces and discuss new relationships with other transportation metrics. We will then present new results regarding their bi-Lipschitz embeddability into Hilbert space. This is joint work with D. Bate.

Computing Science and Mathematics
Faculty of Natural Sciences
University of Stirling
Stirling, FK9 4LA
Scotland
analucia.garciapulido@stir.ac.uk

Minimalidad y Concentración de la Medida

Vicent Gimeno

Palabras clave: Concentración de la medida, Inmersión minimal, Submersión, Fibras minimales

Mathematics Subject Classification 2020: 47A16, 65M22, 65P20

Resumen

El objetivo principal es mostrar el como las inmersiones minimales de variedades compactas en la esfera concentran medida, y de forma exponencial con la dimensión, alrededor de cualquier ϵ -entorno tubular de cualquier ecuador extrínseco. Similarmente, mostrar como este fenómeno de concentración de la medida se puede también extender al caso de submersiones riemannianas de la esfera con fibras minimales. (Trabajo conjunto con V. Palmer)

Universitat Jaume I
Castello de la Plana, Spain
gimenov@uji.es

El radio focal de una subvariedad

Luis Guijarro Santamaría

Palabras clave: Focal radius, submanifolds, Clifford torus

Mathematics Subject Classification 2020: 53C20

Resumen

Una subvariedad compacta siempre tiene un entorno donde cada punto tiene un único punto más cercano en la subvariedad. El *radio de inyectividad normal*, también rebautizado por M. Gromov como el *radio focal*, es el mayor valor $r_0 > 0$ tal que esta propiedad se satisface para todo punto a distancia menor que r_0 .

En esta charla, estudiaremos cómo valores elevados del radio focal puede restringir tanto la subvariedad como la variedad ambiente. También examinaremos alguna cuestión planteada por Gromov en un reciente artículo sobre toros encajados en la esfera unidad. Este trabajo incluye resultados conjuntos con Fred Wilhelm por un lado, y con Jian Ge por otro.

Referencias

- [1] M. GROMOV. Scalar Curvature, Injectivity Radius and Immersions with Small Second Fundamental Forms. *Preprint*, 2023.
- [2] M. GROMOV. *Metric inequalities with scalar curvature*. *Geom. Funct. Anal.* 28 (2018), no. 3, 645–726.
- [3] L. GUIJARRO, F. WILHELM. *Restrictions on submanifolds via focal radius bounds*. *Math. Res. Lett.* 27 (2020), no. 1, 115–139.
- [4] A. PETRUNIN. *Gromov’s tori are optimal*. *Geom. Funct. Anal.* 34 (2024), no. 1, 202–208.

Universidad Autónoma de Madrid
Madrid, España
luis.guijarro@uam.es

Funciones armónicas y finales

Jesús Núñez-Zimbrón

Palabras clave: Espacios RCD, Funciones armónicas, Finales

Mathematics Subject Classification 2020: 53C23

Resumen

En el contexto de variedades riemannianas, Li y Tam [1] probaron que la dimensión de ciertos espacios de funciones armónicas controlan el número de finales bajo la condición de curvatura de Ricci acotada por debajo. Hablaré sobre un trabajo en progreso en el que extendemos estos resultados para espacios RCD, es decir, espacios métricos de medida no necesariamente suaves (y posiblemente con singularidades topológicas) que admiten una noción sintética de “curvatura de Ricci acotada por debajo y dimensión acotada por arriba”. Esto extiende trabajo previo con Mauricio Che [2] en el que dimos cotas uniformes del número de finales para espacios con curvatura no-negativa fuera de un compacto. Este es un trabajo conjunto con Mauricio Che, Fabio Marconi e Ivan Violo.

Referencias

- [1] P. LI AND L.-F. TAM. Harmonic functions and the structure of complete manifolds. *J. Differential Geom.* 35(2), 359–383, 1992.

- [2] M. CHE AND J. NÚÑEZ-ZIMBRÓN. Ball covering property and number of ends of CD spaces with non-negative curvature outside a compact set. *Arch. Math. (Basel)*. **119**(2), 213–224, 2022.

Universidad Nacional Autónoma de México
Investigación Científica, C.U.,
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510.
Ciudad de México, México.
nunez-zimbron@ciencias.unam-mx

Espacios con métricas $\text{Ric}_2 > 0$

Alberto Rodríguez Vázquez

Palabras clave: curvatura de Ricci intermedia positiva, espacios homogéneos, bicocientes.

Mathematics Subject Classification 2020: 53C20

Resumen

En los últimos tiempos se han estudiado ciertas nociones más débiles que la condición de tener curvatura seccional positiva debido a la aparente escasez de espacios que cumplan esta condición. La curvatura de Ricci intermedia k -ésima positiva ($\text{Ric}_k > 0$) en una variedad de Riemann M es una condición que interpola entre la curvatura seccional positiva ($k = 1$) y la curvatura de Ricci positiva ($k = \dim M - 1$).

En esta charla, discutiré un proyecto en curso con Miguel Domínguez Vázquez, David González-Álvaro y Jason DeVito, que tiene como objetivo construir nuevos ejemplos de variedades riemannianas compactas con $\text{Ric}_2 > 0$.

KU Leuven, Department of Mathematics
B-3001 Leuven, Heverlee (Belgium)
alberto.rodriguezvazquez@kuleuven.be

Si parece toro, camina como toro y hace como toro, entonces

...

Sergio Zamora

Palabras clave: Convergencia Gromov–Hausdorff, Espacios de Alexandrov, Espacios RCD, Teoría geométrica de grupos

Mathematics Subject Classification 2020: 53C23, 53C21

Resumen

Existen muchas caracterizaciones del toro como variedad Riemanniana. Por ejemplo, es la única variedad de curvatura de Ricci no negativa y primer número de Betti igual a la dimensión.

En esta charla planeo estudiar dos preguntas: si dichas caracterizaciones son reemplazadas por hipótesis ligeramente más débiles, seguiremos obteniendo un toro o algo parecido? si un espacio X puede ser aproximado por algo que sabemos es un toro, es X necesariamente un toro?

Discutiremos resultados tanto clásicos como actuales en distintos contextos. Este es un trabajo conjunto con Qin Deng, Jaime Santos-Rodríguez, Xinrui Zhao y Xingyu Zhu.

Referencias

- [1] Q. DENG, J. SANTOS-RODRÍGUEZ, S. ZAMORA AND X. ZHAO. Margulis Lemma on RCD(K,N) spaces. *arxiv preprint arXiv:2308.15215* (2023).
- [2] J. SANTOS-RODRÍGUEZ AND S. ZAMORA. On fundamental groups of RCD spaces. *J. Reine Angew. Math.* **799** (2023), 249–286.
- [3] S. ZAMORA. Tori cannot collapse to an interval. *Electron. Res. Arch.* **29** (2021), no.4, 2637–2644.
- [4] S. ZAMORA AND X. ZHU. Topological rigidity of small RCD(K,N) spaces with maximal rank. *to appear*.

Max Planck Institute for Mathematics at Bonn
Vivatsgasse 7, 53111, Bonn, Germany
zamora@mpim-bonn.mpg.de