

VI Encuentro Conjunto RSME-SMM  
València, 1-5 de Julio de 2024  
**Sesión Especial “Avances Recientes en Geometría Diferencial”**

Organizadores:  
**Padi Fuster Aguilera**, Universidad de Colorado Boulder,  
padi.fuster@colorado.edu  
**Raquel Perales Aguilar**, CIMAT,  
raquel.perales@cimat.mx

## Avances en flujos no-locales tipo curvatura media en un ambiente esférico

Esther Cabezas-Rivas

**Palabras clave:** Quermassintegral, flujo conservando volúmenes, flujo por la curvatura media

**Mathematics Subject Classification 2020:** 53E10, 53C21

### Resumen

Recordaremos los resultados básicos para flujos de curvatura media con término global que fuerza la conservación del volumen para hipersuperficies convexas en el espacio Euclídeo e Hiperbólico, mostrando las dificultades que conlleva la extensión a una esfera ambiente. Tras esta reflexión, definimos un nuevo flujo en ambiente esférico para el que el término global puede elegirse de modo que se mantenga fija cualquier quermassintegral. A continuación, partiendo de una hipersuperficie inicial estrictamente convexa, demostramos que el flujo existe para todo tiempo y converge suavemente a una esfera geodésica. Esto proporciona una solución a un problema presente en el flujo de curvatura media que preserva el volumen en la esfera introducido por Huisken en 1987 [2]. También clasificamos soluciones para algunas ecuaciones de tipo curvatura constante en formas espaciales, así como solitones en la esfera y en la rama superior del espacio de De Sitter. Este es un trabajo conjunto con J. Scheuer [1]

### Referencias

- [1] E. CABEZAS-RIVAS AND J. SCHEUER. The quermassintegral preserving mean curvature flow in the sphere. *Analysis & PDE*, to appear. <https://arxiv.org/abs/2211.17040>.
- [2] G. HUISKEN. The volume preserving mean curvature flow. *J. Reine Angew. Math.* **382**(1), 35–48, 1987.

Universitat de València  
E-46100, Burjassot, Spain  
esther.cabezas-rivas@uv.es

# Una breve introducción a la teoría de bases de Gröbner en geometría diferencial

Ixchel D. Gutiérrez-Rodríguez

**Palabras clave:** Einstein conforme, grupo de Lie Lorentziano

**Mathematics Subject Classification 2020:** 53C25, 53C30, 53C50

## Resumen

La teoría de las bases de Gröbner ofrece herramientas extremadamente poderosas para resolver grandes sistemas de ecuaciones polinomiales. Estos métodos son especialmente útiles en geometría diferencial para la clasificación de estructuras geométricas homogéneas. En esta charla, presentaremos los conceptos clave de las bases de Gröbner, centrándonos en su aplicación para la clasificación de métricas de Lorentz Einstein conformes sobre extensiones semidirectas de grupos de Lie de dimensión cuatro.

Este es un trabajo conjunto con E. Calviño-Louzao, E. García-Río, y R. Vázquez-Lorenzo.

## Referencias

- [1] E. CALVIÑO-LOUZAO, E. GARCÍA-RÍO, I. GUTIÉRREZ-RODRÍGUEZ, AND R. VÁZQUEZ-LORENZO. Conformally Einstein Lorentzian Lie groups: extensions of the Euclidean and Poincaré groups. *Class. Quantum Gravity*. **41**(5), 055006, 2024.
- [2] D. COX, D. LITTLE, AND D. O'SHEA. *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015.

Departamento de Matemáticas-CITMAga  
Facultade de Ciencias da Educación e do Deporte, Universidade de Vigo  
36005, Pontevedra, Spain  
ixchel.dzohara.gutierrez.rodriguez@uvigo.gal

# Huellas de bicicleta con monodromía hiperbólica

Luis Hernández Lamonedá

**Palabras clave:** Curva plana simple y cerrada, transformación de Möbius, rodando el plano hiperbólico sobre el euclidiano

**Mathematics Subject Classification 2020:**

## Resumen

Sea  $\Gamma$  una curva cerrada en el plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$  y piensa que es la huella de la rueda delantera de una bicicleta ¿Sucederá que la rueda trasera trace otra curva cerrada?

Fija un punto  $p \in \Gamma$ . Si la bici mide 1, entonces en su posición inicial el cuadro representa un vector  $v \in S^1$  (el círculo centrado en  $p$ ). Al dar una vuelta completa y retornar a  $p$ , el cuadro apuntará ahora en otra dirección  $M_\Gamma(v) \in S^1$ . La aplicación  $M_\Gamma : S^1 \rightarrow S^1$  así obtenida se llama la monodromía (de bicicleta) de  $\Gamma$ . Un teorema de Foote nos dice que  $M_\Gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ , ie es una

transformación de Möbius ¿Qué condiciones en  $\Gamma$  implican que  $M_\Gamma$  es hiperbólica? (observa que en tal caso hay exactamente dos posiciones iniciales de la rueda trasera que hacen que su huella sea otra curva cerrada). En 1906, Menzin conjeturó que si el área encerrada por  $\Gamma$  es mayor a  $\pi$ , entonces  $M_\Gamma$  es hiperbólica. Levi y Tabachnikov [LT] lo han demostrado en el caso en que  $\Gamma$  sea convexa.

En esta charla probaré otra condición suficiente para la hiperbolicidad de  $M_\Gamma$  (que no supone convexidad), así como una condición necesaria para ello (la primera que se conoce). Las pruebas usan la correspondencia entre las curvas del plano euclidiano ( $\mathbb{E}^2$ ) y el hiperbólico ( $\mathbb{H}^2$ ), que se obtiene al rodar  $\mathbb{H}^2$  sobre  $\mathbb{E}^2$  (a la Bryant-Hsu [BH]).

Este es un trabajo en colaboración con Gil Bor (CIMAT).

## Referencias

[BH] R. Bryant, L. Hsu, *Rigidity of integral curves of rank two distributions*, Invent. math. **114**, (1993), 435-461.

[LT] M. Levi, S. Tabachnikov, *On Bicycle Tire Tracks Geometry, Hatchet Planimeter, Menzin's Conjecture, and Oscillation of Unicycle Tracks*, Experiment. Math. **18** (2009), No. 2, 173-186.

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.  
Guanajuato, Guanajuato, México  
lamoneda@cimat.mx

## Extendiendo esferas a hipersuperficies isoparamétricas

Víctor Sanmartín López

**Palabras clave:** Hipersuperficies isoparamétricas, espacios simétricos.

**Mathematics Subject Classification 2020:** 53C40, 53C35, 53C42

## Resumen

Comenzaremos la charla introduciendo el concepto de hipersuperficie isoparamétrica, para luego presentar algunos resultados de clasificación de las mismas, así como su relación con otras clases importantes de subvariedades tales CPC, austeras, minimales u homogéneas. A continuación, nos centraremos en las nuevas familias de hipersuperficies isoparamétricas que hemos construido para cualquier espacio simétrico de tipo no compacto y rango al menos tres.

## Referencias

[1] M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López: Isoparametric hypersurfaces in symmetric spaces of non-compact type and higher rank. *Compos. Math.* **160** (2024), no. 2, 451–462.

Universidad de Santiago de Compostela  
15782, Santiago de Compostela, Spain  
victor.sanmartin@usc.es

## Curvatura de Ricci sintética y cohomogeneidad 1

Jaime Santos Rodríguez

**Palabras clave:** espacios RCD, isometrías

**Mathematics Subject Classification 2020:** 53C21, 53C23

## Resumen

Dadas  $K \in \mathbb{R}$  y  $N \geq 1$  la clase de los espacios  $RCD(K, N)$  consiste de espacios métricos de medida que satisfacen una noción sintética de cota inferior en la curvatura de Ricci. Ejemplos de estos espacios incluyen límites de Gromov-Hausdorff de variedades Riemannianas y a los espacios de Alexandrov.

Debido a la falta de una estructura diferenciable en estos espacios resulta natural pedir alguna estructura extra que nos permita trabajar con ellos. En esta charla consideraremos aquellos espacios RCD que admiten la acción por isometrías de un grupo de Lie compacto y cuyo cociente sea de dimensión uno. Entre los resultados que obtenemos tenemos una descripción topológica de espacios RCD con estas simetrías y además una construcción de pegado que nos permite construir ejemplos nuevos de espacios RCD.

Esta charla está basada en un trabajo conjunto con Diego Corro y Jesús Núñez-Zimbrón [1].

## Referencias

- [1] D. CORRO, J. NÚÑEZ-ZIMBRÓN AND J. SANTOS-RODRÍGUEZ. Cohomogeneity one RCD-spaces. *ArXiv preprint* <https://arxiv.org/abs/2405.09448>

Universidad Politécnica de Madrid  
E-28040, Madrid, Spain  
[jaimе.santos@upm.es](mailto:jaimе.santos@upm.es)