VI Encuentro Conjunto RSME-SMM
València, 1-5 de Julio de 2024
Sesión Especial "Estructuras, espectros y coloraciones en gráficas y digráficas"

Organizadores:
Mika Olsen, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Cuajimalpa,
olsen@cua.uam.mx
Cristina Dalfó, Universitat de Lleida,
cristina.dalfo@udl.cat

Coloraciones arcoíris balanceadas en el hipercubo n-dimensional sobre t-elementos

Gabriela Araujo-Pardo

Palabras clave: hypergraphs, n-cube, upper chromatic number, upper chromatic balanced colorings

Mathematics Subject Classification 2020: 05C15

Resumen

En este trabajo consideramos al **hipercubo n-dimensional sobre t-elementos** como una hipergráfica donde el conjunto de vertices son los puntos del n-cubo y las hiperaristas son las líneas paralelas a los ejes y las diagonales de todos los hiperplanos maximales. Por ejemplo, si el cubo es 3-dimensional, las hiperaristas son todas las líneas horizontales, verticales y diagonales de los planos xy, yz y xz, mas las cuatro diagonales que pasan por el centro del cubo y cruzan todos los planos paralelos en cada dirección.

Estudiamos el concepto de **coloraciones arcoíris-balanceadas** y de **número cromático superior balanceado** en esta hipergráfica.

Una coloración es **balanceada** si todas las clases cromáticas tienen la misma cardinalidad o difieren a lo más en uno y es **arcoíris** si al menos una hiperarista tiene todos sus vértices de colores diferentes. El **número cromático superior balanceado** es el máximo número de colores con el que puede colorearse el hipercubo con la propiedad de que no exista ninguna coloración arcoíris-balanceada. Acotamos superiormente este número y mostraremos que esta cota es exacta para $n \geq 2$ y $t \geq 4n-2$. Además, mostramos que la cota se alcanza en algunos casos donde n y t tienen valores pequeños.

Este es un trabajo conjunto con Silvia Fernández-Merchant, Adriana Hansberg, Dolores Lara, Amanda Montejano y Deborah Oliveros.

Referencias

[1] G. Araujo-Pardo, S. Fernández-Merchant, A. Hansberg, D. Lara, A. Montejano, D. Oliveros, The exact balanced upper chromatic number of the n-cube over t elements, 36th Canadian Conference on Computational Geometry, 2024, to appear.

[2] G. Araujo-Pardo, S. Fernández-Merchant, A. Hansberg, D. Lara, A. Montejano, D. Oliveros, Bounding the balanced upper chromatic number, Discrete Mathematical Days Conference, 2024, to appear.

[3] A. Montejano, Rainbow considerations around the Hales-Jewett Theorem, preprint, 2024, arXiv:2403.13726.

Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacan, Ciudad de México, México
garaujo@im.unam.mx

On the product of the largest and smallest eigenvalues of a graph

Miquel Àngel Fiol

Palabras clave: Interlacing, eigenvalues, maximum degree

Mathematics Subject Classification 2020: 05C25, 05C50

Resumen

We use eigenvalue interlacing to derive an inequality between a graph's maximum degree and its maximum and minimum adjacency eigenvalues. The equality case is fully characterized.

This is joint work with Aida Abiad (Eindhoven University of Technology) and Cristina Dalfó (Universitat de Lleida).

Referencias

[1] A. Abiad, C. Dalfó, and M. A. Fiol, Algebraic characterizations of regularity properties in bipartite graphs, European J. Combin. 34(8) (2013) 1223–1231.

[2] P. Csikvári, Note on the sum of the smallest and largest eigenvalues of a triangle-free graph, Linear Algebra Appl. 650 (2022) 92–97.

[3] D. A. Gregory, D. Hershkowitz, and S. J. Kirkland, The spread of the spectrum of a graph, Linear Algebra Appl. 332–334 (2001) 23–35.

[4] W. H. Haemers, Interlacing eigenvalues and graphs, Linear Algebra Appl. 226-228 (1995) 593–616.

[5] H. Rojo, O. Rojo, and R. Soto, Related bounds for the extreme eigenvalues, Comput. Math. Appl. 38 (1999) 229–242.

Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona
miguel.angel.fiol@upc.edu

L(2,1)-coloraciones glotonas

Julián Fresán-Figueroa

Palabras clave: Greedy algorithm, L(2,1)-colorings, L(2,1)-Grundy

Mathematics Subject Classification 2020: 05C15, 05C85

Resumen

Resumen: Una L(2,1)-coloración de una gráfica consiste en asignar números enteros no negativos a sus vértices, de manera que dos vértices adyacentes reciban números que difieran al menos en 2, y dos vértices no adyacentes pero con un vecino común reciban números que difieran al menos en 1. El objetivo es minimizar el valor del número más grande asignado a los vértices, un problema que suele ser muy complejo.

Un algoritmo glotón es una técnica eficiente para encontrar una L(2,1)-coloración, y podría ayudar a determinar el número más grande asignado. Sin embargo, ¿cuán ineficaz puede ser una coloración obtenida mediante un algoritmo glotón? En esta charla, abordaremos el problema de determinar qué tan mal puede resultar el utilizar un algoritmo glotón para dar una L(2,1)-coloración.

Este es un trabajo conjunto con Diego González-Moreno, Nahid Yelene Javier Nol y Mika Olsen.

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Cuajimalpa
05348 Cuajimalpa, Ciudad de México, México
jfresan@cua.uam.mx

Colorear grafos de Cayley

Kolja Knauer

Palabras clave: Grafo de Cayley, teoría de grupos

Mathematics Subject Classification 2020: 05C15, 05C25

Resumen

Un grafo de Cayley $\mathrm{Cay}(G, C)$ de un grupo finito G is *minimal* si C es un conjunto generador de G minimal por inclusion. En los setenta, Babai discute por primera vez el problema de determinar el número cromático de un grafo de Cayley minimal y propone una conjectura fuerte que implicaría que todos estos grafos tienen número cromático acotado por una constante global. En este trabajo mostramos que esta conjectura fuerte es falsa. Sin embargo también mostramos que todo grafo minimal de un grupo nilpotente o dihedral generalizado tiene número cromático a lo mucho tres. También encontramos grafos minimales de Cayley con número cromático cuatro y mostramos que eso es lo más alto posible hasta orden 215. Nótese que, veinte años más tarde, el mismo Babai propuso otra conjectura fuerte que implica que existen familias de grafos minimales de Cayley con número cromático no acotado. Esta sigue abierta.

Universitat de Barcelona
Barcelona
kolja.knauer@ub.edu

On local bipartite Moore graphs

Nacho López

Palabras clave: Moore bound, bipartite graph

Mathematics Subject Classification 2020: 05C35

Resumen

Given the values of the maximum degree d and the (even) girth g of a bipartite graph, there is a natural lower bound for its number of vertices known as the bipartite Moore bound. Graphs attaining such a bound are referred to as bipartite Moore graphs. The fact that there are very few bipartite Moore graphs suggests the definition of local bipartite Moore graphs. Here we consider the problem of classifying these graphs according to their 'proximity' to some properties that a theoretical bipartite Moore graph should have.

This is joint work with Josep Conde (Universitat de Lleida) and Gabriela Araujo-Pardo (UNAM).

Universitat de Lleida
Lleida
nacho.lopez@udl.cat

Problemas anti-Ramsey en digráficas: ciclos dirigidos arcoiris.

Juan José Montellano-Ballesteros

Palabras clave: Digráficas, Anti-Ramsey, ciclos dirigidos, coloración de arcos

Mathematics Subject Classification 2020: 05C15

Resumen

Sea $\overleftrightarrow{K_n}$ la biorentación completa de K_n. Dada una coloración de los arcos de $\overleftrightarrow{K_n}$, una subdigráfica D de $\overleftrightarrow{K_n}$ será llamada *arcoiris* si no hay dos arcos de D que hayan recibido el mismo color. Dada una digráfica D y un entero positivo n, sea $\overrightarrow{ar}(n, D)$ el mínimo entero k, tal que toda coloración de los arcos de $\overleftrightarrow{K_n}$ con k colores contiene una copia arcoiris de D. Esto puede considerarse una extensión natural de los problemas anti-Ramsey introducidos por Erdös, Simonovits y Sós en 1978. En esta plática nos centraremos en el caso en que D es un ciclo dirigido de orden $p \geq 4$. El caso para $p = 3$ se resuelve en [1].

Dado un entero $p \geq 4$, sea $\overrightarrow{C_p}$ el ciclo dirigido con p vértices y dados los enteros $n \geq p \geq 3$ sea $\tau(n,p)$ el tamaño máximo de una gráfica de orden n libre de subgráficas isomorfas a K_p (el número de Turán).

Es esta plática veremos que para toda $n \geq 4$,

$$\tau(n,4) + 2 \leq \overrightarrow{ar}(n, \overrightarrow{C_4}) \leq \tau(n,4) + 4;$$

y para todo par de enteros $n \geq p \geq 5$,

$$\tau(n,p) + 2 \leq \overrightarrow{ar}(n, \overrightarrow{C_p}) \leq \tau(n,p) - 3\binom{p}{2} + 16(p-2)^2(p-1)^4 + 6.$$

Referencias

[1] W. Li, S. Zhang, R. Li. Rainbow triangles in arc-colored digraphs. *Discrete Applied Mathematics.* **314**, 169–180, 2022.

Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacan, Ciudad de México, México
juancho@im.unam.mx

Sobre la estructura cíclica de los torneos bipartitos

Nahid Yelene Javier Nol

Palabras clave: Digráficas, Torneos, Ciclos

Mathematics Subject Classification 2020: 05C20, 05C38

Resumen

En 1999 V. Neumann-Lara introduce un invariante numérico la inconexión acíclica de una digráfica, el cual se define como el máximo número de colores que se requiere para colorear los vértices de una digráfica de tal forma que no haya ciclos bien coloreados. Un ciclo está bien coloreado cuando cualquier par de vértices adyacentes recibe colores diferentes. Este parámetro mide la complejidad de la estructura ciclíca de las digráficas, a menores valores, mayor es su complejidad, por lo que la inconexión acíclica es un parámetro muy complicado de determinar por esta razón solo se ha estudiando en algunas familias de digráficas, particularmente en torneos circulantes, torneos regulares, torneos bipartitos, etc. En esta plática hablaremos de la inconexión acíclica de una familia de torneos bipartitos circulantes.

Este es un trabajo conjunto con Ilan A. Goldfeder y Joaquín Tey.

Referencias

[1] A.P. Figueroa, B. Llano, M. Olsen, E. Rivera Campo, *On the acyclic disconnection of multipartite tournaments*, Discrete Appl. Math. 160 (2012) 1524-1531.

[2] V. Neumann-Lara, *The acyclic disconnection of a digraph.* 16th British Combinatorial Conference (London, 1997). Discrete Math. 197/198 (1999), 617-632.

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa
09340 Iztapalapa, Ciudad de México, México
nahid@xanum.uam.mx

Sobre Gráficas de Fichas

Mónica Reyes

Palabras clave: Gráfica de fichas, espectro laplaciano, gráfica de voltaje, partición regular

Mathematics Subject Classification 2020: 05C15, 05C10, 05C50

Resumen

En la teoría de gráficas, existen diferentes operaciones que construyen una gráfica "grande.ª partir de una "más pequeña". Entonces, la pregunta es qué propiedades de la primera se pueden deducir (o al menos aproximar) a partir de las propiedades de la segunda. Una de estas operaciones que recientemente ha recibido atención en la literatura es la construcción de gráficas de fichas. La gráfica de fichas $F_k(G)$ de una gráfica G es la gráfica cuyos vértices son los k-subconjuntos de vértices de G, dos de los cuales son adyacentes cuando su diferencia simétrica es un par de vértices adyacentes en G. En esta charla, discutiremos algunos hechos interesantes sobre las gráficas de fichas.

Este es un trabajo conjunto con Cristina Dalfó (Universitat de Lleida), Miquel Àngel Fiol (Universitat Politècnica de Catalunya) y Arnau Messegué (Universitat de Lleida).

Referencias

[1] K. Audenaert, C. Godsil, G. Royle, and T. Rudolph, Symmetric squares of graphs, *J. Combin. Theory B* **97** (2007) 74–90.

[2] C. Dalfó, F. Duque, R. Fabila-Monroy, M. A. Fiol, C. Huemer, A. L. Trujillo-Negrete, and F. J. Zaragoza Martínez, On the Laplacian spectra of token graphs, *Linear Algebra Appl.* **625** (2021) 322–348.

[3] C. Dalfó, and M. A. Fiol, On the algebraic connectivity of token graphs, *J. Algebr. Comb.* (2024) `https://doi.org/10.1007/s10801-024-01323-0`.

[4] R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, C. Huemer, F. Hurtado, J. Urrutia, and D. R. Wood, Token graphs, *Graphs Combin.* **28** (2012), no. 3, 365–380.

[5] S. Ibarra and L. M. Rivera, The automorphism groups of some token graphs, `arXiv:1907.06008v3[math.CO]`

Universitat de Lleida
Lleida
`monicaandrea.reyes@udl.cat`